# クレモナ変換とK3曲面の周期写像の次数について



斎藤, 政彦

代数幾何学シンポジウム記録
1985年度　pp.120-142


# クレモナ変換とK3曲面の周期写像の次数について

京大理　斎藤政彦

## §0. 序.

Xをk個の通常二重点を持ったK3曲面，HをX上のample直線束とする。$\mathcal{M}_c$で(X,H)の粗モヂュライ空間を表わす。($c_1(H)$は固定する。)このような組(X,H)に対して，我々は"周期"を定義する事ができ，自然な周期写像

$$p : \mathcal{M} \longrightarrow \mathcal{D}/O_+(N)/\pm 1$$

を得る。(cf. §2 )

この小論では，次の2つの場合について周期写像の次数を，ある有限二次形式の直交群の位数を用いて計算し，合せて周期領域$\mathcal{D}/O_+(N)/\pm 1$がK3曲面の双有理同値類を分類するモヂュライ空間である事を示す。

(1) k個のnodesを持つ$\mathbb{P}^2$の既約6次曲線で分岐した2重被覆により得られるK3曲面。($3 \leq k \leq 10$).

(2) KunevとTodorovによって構成された$p_g = 1$, $1 \leq c_1^2 \leq 8$ $q = 0$の一般型曲面の商空間として得られるK3曲面。

（これは11種類ある。）

さらに，$\mathbb{P}^2$や$\mathbb{P}^3$における regular Cremona 変換に関する，Coble の古典的な結果に，この周期写像によって"現代的解釈"が与えられる事に言及する。（cf. Coble [3], [4], [5]）

この結果は，D. R. Morrison 氏との共同の研究による。（cf. [14]），以下すべて複素数体$\mathbb{C}$上で考える。

## §1．準備

定義 1　$X$ : compact analytic space of dim 2 が次の条件を満す時，（一般化された）K3曲面という。

(i)　$X$の特異点は高々有理二重点

(ii)　Dualizing sheaf $\omega_X$は自明

(iii)　$\pi_1(X) \cong 0$.

以下，「一般化された」という形容詞はつけない。

$S$を非特異K3曲面とする。$S$は Siu の定理より Kähler 計量をもつ。$S$の周期(=ホッジ構造)について復習する。$S$の 2nd コホモロジー群 $H^2(S, \mathbb{Z})$は，カップ積により二次形式$Q$をもつ。$Q$は，非退化，even，unimodular，符号数$(3, 19)$より

$$(H^2(S, \mathbb{Z}), Q) \cong \Lambda = \overset{3}{\oplus} U \oplus (E_8(-1))^2.$$

ただし，$U = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$である。$S$上には$\omega_S \cong \mathcal{O}_S$より，nowhere vanishing hol. 2 form $\omega$が存在する。$\omega$は，

ホッジ分解 $H^2(S,\mathbb{C}) = H^{2,0} \oplus H^{1,1} \oplus H^{0,2}$ を定める。ただし
$H^{2,0} = \mathbb{C}\cdot\omega$，$H^{0,2} = \mathbb{C}\cdot\bar{\omega}$，$H^{1,1} = (H^{2,0} \oplus H^{0,2})^{\perp}$。さらに

$$\mathcal{C}_S = \{ x \in H^{1,1}_{\mathbb{R}} \mid Q(x,x) > 0 \} = \mathcal{C}_S^+ \amalg \mathcal{C}_S^-$$

$\mathcal{C}_S^+ \ni$ Kähler form　$\mathcal{C}_S^- = -\mathcal{C}_S^+$.

$\Delta^+(S) = \{ e \in H^2(S,\mathbb{Z}) \; : \; e = [E] \; ; \; E$ : effective $-2$ curve $\}$

$V^+(S) = \{ x \in \mathcal{C}_S^+ \; : \; (x,e) > 0$ for all $e \in \Delta^+(S) \}$

$\Delta(S) = \Delta^+(S) \cup -\Delta^+(S)$,

$W(S)$ : Weyl group generated by $\{ s_e \}_{e \in \Delta(S)}$.　とおく。

ただし，$s_e(x) = x + (x,e)e$，$x \in H^2(S,\mathbb{Z})$.

大域トレリの定理（strong form）を思い出しておく。

<u>定理 2</u>　（Burns，Rapport）（cf. [1]）

$S$，$S'$ を非特異 K3 曲面，$\exists \phi : H^2(S,\mathbb{Z}) \longrightarrow H^2(S',\mathbb{Z})$

Hodge isometry（i.e. $\phi$ は二次形式を保ち，$\phi_{\mathbb{C}}(H^{2,0}(S)) = H^{2,0}(S')$）

s.t.　$\phi(V^+(S)) = V^+(S')$.

$\Longrightarrow$　$\exists^1 f : S' \xrightarrow{\sim} S$ 同型　s.t.　$f^* = \phi$.

この定理と，$V^+(S)$ が Weyl 群 $W(S)$ の基本領域になっている事を用いれば，次の weak form を得る。

<u>定理 3</u>（cf. [1]）

$S$，$S'$ 非特異 K3 曲面，$\exists \phi : H^2(S,\mathbb{Z}) \xrightarrow{\sim} H^2(S',\mathbb{Z})$

Hodge isometry　$\Rightarrow$　$\exists f : S' \xrightarrow{\sim} S$ 同型.

さてXを射影的K3曲面，HをXの ample line bundle とする。この組(X,H)に対して，"周期"を定義しよう。

$f: S \longrightarrow X$ を minimal resolution，$\{E_i\}_{i\in I}$ を $f$ の例外因子( reduced )全体の集合とする。

$$L(X) = \text{primitive span of } \bigoplus_{i\in I} \mathbb{Z} E_i \subset H^2(S,\mathbb{Z}) = \left(\bigoplus_{i\in I} \mathbb{Q} E_i\right) \cap H^2(S,\mathbb{Z}).$$

$$M(X) = \text{primitive span of } \mathbb{Z} f^*(H) \oplus L(X) \subset H^2(S,\mathbb{Z})$$

$$N(X) = M(X)^\perp \subset H^2(S,\mathbb{Z}) \quad M(X)\text{の直交補空間}.$$

明らかに，$M(X) \subset H^{1,1}(S) \cap H^2(S,\mathbb{Z})$ より，ホッジ分解

$$N(X)_{\mathbb{C}} = N(X) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{C} = \underset{\substack{\mathrel{\rotatebox{90}{$\cong$}} \\ \mathbb{C}\cdot\omega}}{N^{2,0}} \oplus \underset{\substack{\mathrel{\rotatebox{90}{$\cong$}} \\ \langle\omega\rangle^\perp}}{N^{1,1}} \oplus \underset{\substack{\mathrel{\rotatebox{90}{$\cong$}} \\ \mathbb{C}\cdot\bar{\omega}}}{N^{0,2}}$$

を得る。又，$Q|_{N^{2,0}\oplus N^{0,2}} > 0$，$Q|_{N^{1,1}} < 0$ より，

$(N(X), Q, \{N^{p,q}\})$ は偏極ホッジ構造となる。これが(X,H)の周期である。これは $N(X)$ と，holomorphic 2 form $\omega$ (on S)によって定まるので $(N(X), \omega)$ とも略記する。

我々は，まず次の問題を考える。

<u>問題 4.</u> $(X,H)$，$(X',H')$ polarized K3曲面

$$\exists\, \gamma : N(X) \xrightarrow{\sim} N(X') : \text{isometry s.t.}$$

$$\gamma_{\mathbb{C}}(N^{2,0}(X)) = N^{2,0}(X') \quad (\text{or } \gamma_{\mathbb{C}}(\omega_X) = \lambda\cdot\omega_{X'},\ \lambda \in \mathbb{C}^*)$$

$$\Longrightarrow \quad \exists\, g : X' \xrightarrow{\sim} X \quad \text{s.t. } g^*(H) = H' \quad ?$$
$$\text{s.t. } g^* = \gamma$$

一般にこれは正しくない。非特異な場合でもすでに成立しない例がある。$(X, K_1)$, $(X', K_2)$ が Kähler K3曲面の時には，Morrison [12]が，$X$ と $X'$ の特異点の type が異なるのに，周期が同型である例を構成している。又 Morrison は[12]で，$\gamma : N(X) \to N(X')$ が $\tilde{\gamma} : H^2(S, \mathbb{Z}) \longrightarrow H^2(S', \mathbb{Z})$ に拡張され $\tilde{\gamma}(f^*(H)) = f^*(H')$ であれば，問題4が肯定的である事を示している。

これより，次の問題が提起される。

問題5　$X$ に対して，その周期 $(N(X), \omega)$ は何を表しているのか?

これに関しては§8に部分的解答が与えられている。しかし一般には，よくわからない。

## §2. 通常二重点のみをもつK3曲面のモヂュライ

有理二重点を許した偏極K3曲面 $(X, H)$ の family に関して§1でのべた周期写像を定義するためには，$N(X)$は固定されていなければならない。逆に言うと，$M(X) \hookrightarrow H^2(S, \mathbb{Z})$の埋め込みが固定されていなければならない。又以下で述べるようにある種のモヂュライ問題では必然的にそのような，固定された埋め込み $M \hookrightarrow \Lambda$ を持つようなK3曲面のモヂュライを構成する必要が生じる。

ここでは，$(X, H)$ が通常二重点 ($x^2+y^2+z^2=0$, $A_1$ pt) を持

つ偏極K3曲面である時に，モヂュライの構成をする。Morrison, Nikulin はさらに一般の場合も扱っている。

$X$ を $k$ 個の通常二重点 $p_1, \cdots, p_k$ を持つ K3 曲面とする。$f: S \longrightarrow X$ を minimal resolution, $E_i = f^{-1}(p_i)$ とする。$E_i$ は非特異有理曲線，$E_i^2 = -2$ である。

<u>定義 6</u>　$\langle -2 \rangle^k = \bigoplus_{i=1}^{k} \mathbb{Z} E_i \hookrightarrow H^2(S, \mathbb{Z})$ の埋め込みに対し $L = \bigoplus_{i=1}^{k} \mathbb{Q} E_i \cap H^2(S, \mathbb{Z})$ (primitive span) $\hookrightarrow H^2(S, \mathbb{Z})$ を $X$ の double point lattice と言う。

$\alpha = \log_2 [L : \langle -2 \rangle^k]$ を L の 2-index と言う。

$A$ をアーベル曲面，$X = A/\langle \iota \rangle$　$\iota: z \to -z$ とする。$X$ の double point は 16 個で，double point lattice を $L$ とすると $\alpha = 5$ である。この sublattice $L$ を $L_{5,16} \hookrightarrow \Lambda \cong H^2(S, \mathbb{Z})$ と書く。次の定理は，bilinear code の理論で証明される。

<u>定理 (Morrison[11])</u>

(1)　$X$ : K3 曲面，$\mathrm{Sing}(X)$ = 通常二重点．

$\Rightarrow$ $X$ の double point lattice $L(X)$ は $L_{5,16}$ の sublattice である。

(2)　$(\alpha, k)$ に対し，$\mathrm{rk}\, L_{\alpha,k} = k$，2-index of $L_{\alpha,k} = \alpha$ の double point lattice $L_{\alpha,k}$ が存在 $\Longleftrightarrow$ $2^{4-\alpha}(2^\alpha - 1) \leqq k \leqq \alpha + 11$.

(3) (2) の double point lattice $\mathcal{L}_{d,k}$ は，唯一の primitive embedding $\mathcal{L}_{d,k} \hookrightarrow \Lambda$ (K3 lattice) をもつ。

さて，double point lattice $\mathcal{L}_{d,k}$ を1つ固定し，又，$\lambda^2 = d > 0$ となる元 $\lambda$ をとる。$\langle \lambda, \mathcal{L}_{d,k} \rangle \hookrightarrow \Lambda$ なる埋め込みが存在したと仮定し，$M$ = primitive span of $\langle \lambda, \mathcal{L}_{d,k} \rangle \hookrightarrow \Lambda$ とする。簡単のために $M \hookrightarrow \Lambda$ の埋め込みは unique と仮定する。

$\sigma$ : one component of $\{ x \in M \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{R} \mid x^2 > 0 \} \ni \lambda$

$V^+$ : one of components of $\{ x \in \sigma \mid {}^\forall \delta \in M_n$ s.t. $\delta^2 = -2,\ \delta \cdot x \neq -2 \}$
s.t. ${}^\forall x \in V^+$, $x \cdot \lambda > 0$, $x \cdot e_i > 0$

$\eta$ : one of components of $\pi^+(\Lambda \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{R}, Q) = \left\{ \begin{array}{l} \text{oriented real} \\ \text{3 space } \pi \subset \Lambda_{\mathbb{R}} \end{array} \middle| Q|_\pi > 0 \right\}$
(positive sign structure).

$N = M^\perp$ in $\Lambda$, $\nu$ : positive sign structure on $N_n \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{R}$ with
$$\eta = \sigma \wedge \nu.$$

Moduli functor, $\mathcal{M}$ を {Analytic space} $\to$ (Sets)

$$\mathcal{M}(T) = \left\{ \begin{array}{l} \pi : \mathcal{X} \to T \ : \ \text{family of K3 surfaces} \\ \exists H : \text{relatively ample line bundle on } \mathcal{X} \\ {}^\forall t \in T,\ \mathcal{X}_t : \text{K3 surface with } k\ A_1 \text{ pts.} \\ \quad \exists f : S_t \to \mathcal{X}_t \ : \ (\text{ファイバーごとに}) \text{ minimal resolution} \\ \exists \alpha : H^2(S_t, \mathbb{Z}) \xrightarrow{\sim} \Lambda \ : \text{Isometry} \\ \text{s.t. } \alpha^{-1}(\mathcal{L}_{d,k}) \subset L(\mathcal{X}_t) \text{ and } \alpha^{-1}(\lambda) = f^*(H_t) \\ \quad \alpha^{-1}(V^+ \cap M) \subset \{ \text{ample line bundles on } S_t \} \end{array} \right\}$$

と定める。$\mathcal{M}$ の粗モヂュライ空間を $\mathcal{M}_c$ と書く。

$\widetilde{\mathcal{D}} = \{[\omega] \in \mathbb{P}(N \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{C}) \mid \omega \cdot \omega = 0,\ \omega \wedge \bar{\omega} > 0\}$ とおく。$\widetilde{\mathcal{D}}$ は連結ではなく,

$\mathcal{D} = \{[\omega] \in \widetilde{\mathcal{D}} \mid \mathrm{Re}\,\omega \wedge \mathrm{Im}\,\omega \in \nu\}$ は連結なIV型対称領域である。

$O_+(N) = \{\gamma \in O(N) \mid \gamma(\nu) = \nu\}$, $O_+(\Lambda) = \{\tilde{\gamma} \in O(\Lambda) \mid \tilde{\gamma}(\eta) = \eta\}$

とおく。さらに

$G = \{\tilde{\gamma} \in O_+(\Lambda) \mid \tilde{\gamma}(M) = M,\ \tilde{\gamma}(\lambda) = \lambda\}$

$\Gamma = \mathrm{Im}\,(G \longrightarrow O_+(N)/\pm 1)$ とおく。

すると次の定理を得る。

<u>定理 7</u> $\mathcal{M}_c \cong \mathcal{D}/\Gamma$

(すなわち, functor $\mathcal{M}$ は, analytic space $\mathcal{D}/\Gamma$ を coarse moduli にもつ)

<u>証明</u>. $(X, H) \in \mathcal{M}_c$ とする。minimal resolution $f : S \to X$ によって $f^*(H)$, $f^{-1}(p_i) = E_i$, $i = 1, \cdots, k$ に対し, marking $\alpha : H^2(S, \mathbb{Z}) \to \Lambda$ があって, $\alpha(f^*(H)) = \lambda$, $\alpha(E_i) = e_i$ とできる。$H^2(S, \mathbb{C})$ の Hodge 構造を用いて自然に $\omega \in N_{\mathbb{C}}$ である事がわかり, $(N, \nu)$ に Hodge 構造が定まる。よって周期写像 $\mathcal{M}_c \longrightarrow \mathcal{D}/O_+(N)/\pm 1$ が定まるが, surjective である事がわかる。さて $(X, H)$ と $(X', H') \in \mathcal{M}_c$ の Hodge 構造を $(N, \omega)$, $(N, \omega')$ としよう。今, $\gamma \in \Gamma$ とすると, $\exists\, \tilde{\gamma} : \Lambda \to \Lambda$ s.t. $\tilde{\gamma}\,|N = \gamma$, $\tilde{\gamma}(M) = M$ $\tilde{\gamma}(\lambda) = \lambda$. $\tilde{\gamma}(\eta) = \eta$. さらに $\gamma : N \to N$ が Hodge 構造を保つ

ならば，トレリの定理2より，$\exists g : X \xrightarrow{\sim} X'$ s.t. $g^* = \gamma$ and $g^*(H) = H'$。又逆は明らか。∴ $\mathcal{M}_C \xrightarrow{\sim} \mathcal{D}/\Gamma$ q.e.d.

定理7の証明中にもあったように，周期写像

$$p : \mathcal{M}_C \longrightarrow \mathcal{D}/O_+(N)/\pm 1$$

が定義される。以後これを特殊な場合について考察する。
定理7から $\mathcal{M}_C \simeq \mathcal{D}/\Gamma$ であるから

$$\deg. \; p = [\, O_+(N)/\pm 1 : \Gamma \,]$$

である。

§3. 2つの例. 2つの even lattice を定義する。

$M_n = \langle \lambda, e_1, \cdots, e_n \rangle \quad \lambda^2 = 2,\ \lambda \cdot e_i = 0,\ e_i \cdot e_j = -2\delta_{ij}$

$\mathcal{L}_{\alpha,k}$ : double point lattice generated by $e_1, \cdots, e_k$

s.t. $[\mathcal{L}_{\alpha,k} : \langle e_1, \cdots e_k \rangle] = 2^{\alpha}$, $16 \geqq k \geqq 9$,

$2^{4-\alpha}(2^{\alpha} - 1) \leqq k \leqq \alpha + 11$

$M_{\alpha,k} = \langle \lambda, \mu, \mathcal{L}_{\alpha,k} \rangle \quad \lambda^2 = 2k - 16,\ \mu = \frac{1}{2}\left(\lambda + \sum_{i=1}^{k} e_i\right)$.

定理8 [11] [14]: $\Lambda$ : K3格子

(1) $0 \leqq n \leqq 10$, $\exists^1 : M_n \hookrightarrow \Lambda$ primitive embedding

(2) $(\alpha, k)$ as above $\neq (5, 16)$, $\exists^1 : M_{\alpha,k} \hookrightarrow \Lambda$ primitive embedding.

(3) $M_{5,16} \hookrightarrow \Lambda$ never primitive. $\exists\, M'_{5,16} \supset M_{5,16}$ index 2

s.t. $\exists^1\, M'_{5,16} \hookrightarrow \Lambda$ primitive embedding.

ここで, $N_n = M_n^{\perp}$ in $\Lambda$ かつ $N_{d,k} = M_{d,k}^{\perp}$ in $\Lambda$ とする。

$\mathcal{M}_n$, $\mathcal{M}_{d,k}$ を, $M_n, M_{d,k}$ に対応する moduli functor とする。$M_n$, $M_{d,k}$ を NS(S) の sublattice に含むものを具体的に構成してみよう。

(1) $C$ : $n$ 個の nodes のみをもつ既約な 6 次曲線 $\subset \mathbb{P}^2$.
次の図式を考える。

$$\begin{tikzcd}
\text{minimal resolution} & S \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\tilde{\pi}"'] & Z \arrow[d, "\pi"] & \\
\text{Blow up of } n\text{-nodes of } C \arrow[r] & Y \arrow[r, "g"] & \mathbb{P}^2 &
\end{tikzcd}$$

$\bar{C}$ で分岐した Double cover. ($\tilde{\pi}$)　　$C$ で分岐した Double cover ($\pi$)

$(Z, \pi^*(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(1)))$ pol. K3 曲面, $A_1$ pts を $n$ 個もつ.

$\mathcal{M}_n(Z) = \langle L, E_1, \cdots, E_n \rangle$ $E_i$ : exc. curve of $f$

$L = f^* \circ \pi^*(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(1))$. この時 $L^2 = 2$, $L \cdot E_i = 0$, $E_i \cdot E_j = -2\delta_{ij}$.

かつ, $M_n(Z) \hookrightarrow H^2(S, \mathbb{Z})$ は primitive.

$$\mathcal{M}_{n,C} \underset{\text{open dense}}{\hookleftarrow} \{(Z, \pi^*(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(1)))\}/\sim$$
$$\cong \{C \subset \mathbb{P}^2 : \text{irreducible sextic curve with } n\text{-nodes}\}/PGL(3).$$

(2) $A$ : 主偏極アーベル曲面. $\Theta$ : Line bundle on $A$ s.t. $\Theta^2 = 1$.

$\Phi_{|2\Theta|} : A \to A/\langle\iota\rangle \subset \mathbb{P}^3$ で, $A/\langle\iota\rangle = X$ は Kummer 曲面となる。

$X$ の特異点は 16 個の $A_1$ pts であるが, $\mathbb{P}^3$ の 2 次曲面で, $A/\langle\iota\rangle$

の特異点 $p_{k+1},\cdots,p_{16}$ を通るものが存在するとする。

$f: S \to A/\langle\iota\rangle$ を minimal resolution, $f^{-1}(p_i) = E_i$ $i=1,\cdots,16$.

$L = \bigoplus_{i=1}^{k} \mathbb{Z} E_i$ の $H^2(S,\mathbb{Z})$ での primitive span, $H = f^*\mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}(1) - E_{k+1}$ $- E_{k+2} - \cdots - E_{k+16}$ とする。$m = \frac{1}{2}(H + \sum_{i=1}^{k} E_i) \in NS(S)$ とおく。

ここで，$\exists \alpha$ s.t $L \cong L_{\alpha,k}$ か？

$$M = \langle H, m, L \rangle \cong M_{\alpha,k}.$$

すなわち Kummer 曲面の partial resolution として上のような例を構成できる。

$(X, H, m)$ を，上のような構成からできる K3 曲面，$f: S \to X$ を minimal resolution, $H, m \in NS(S)$, $E_i \in NS(S)$ $i=1,\cdots,k$。今 linear system $|H|$ の smooth member を $B$ とする。$B + E_1 + E_2 + \cdots + E_k \in |2m|$ より，$S$ 上 $B + E_1 + \cdots + E_k$ で分岐する Double cover がつくれるが，それを $\tilde{Z}$ とする。$E_1,\cdots,E_k$ の逆像は，$-1$ - curve となるのでつぶしてやると，$Z$ という極小な一般型曲面を得る。$p_g(Z) = 1$, $q = 0$, $c_1^2(Z) = k - 8$ である。上記の $(\alpha, k)$ の可能性は11種類あるが，このような一般型曲面を Todorov 曲面と呼ぶ。特に$(\alpha, k) = (0, 9)$ の時は Kuner 曲面と呼ぶ。これらの11種類は既約な粗モヂュライ空間 $\mathcal{U}_{\alpha,k}$ を持ち，又自然な写像 $\mathcal{U}_{\alpha,k} \longrightarrow \mathcal{M}_{\alpha,k,c}$ を持つ。このファイバーは generic には linear system の，Zariski open set である。

（以上の構成は，Todorov, Morrison による。）

注) Todorov 曲面は，次のようにも特徴づけられる。$Z$：有理二重点を持つ dualizing sheaf が ample な曲面で，$j : Z \to Z$ involution をもち $\Sigma = Z/\langle j \rangle$ は K3 曲面，かつ $\varphi_{|2K_Z|} : Z \longrightarrow \mathbb{P}^{\dim|2K_Z|}$ が $Z \longrightarrow \Sigma \longrightarrow \varphi_{|2K_Z|}(Z)$ を factor するもの。

いくつかの $(\alpha, k)$ について，Todorov 曲面 $Z$ とその底 K3 曲面を見ておこう。（一般に $(\alpha, k)$ に対し $\dim|2K_{Z_{\alpha,k}}| = k-7$ ）

(i) $(\alpha, k) = (0,9)$ ：$Z$ ：Kunev 曲面. $\varphi_{|2K_Z|} : Z \longrightarrow \mathbb{P}^2$ Galois cover with Galois group $\mathbb{Z}/2 \times \mathbb{Z}/2$. $\Sigma \xrightarrow[\pi]{} \mathbb{P}^2$ double cover, branch of $\pi = C_1 \cup C_2$, $C_1, C_2$ は非特異3次曲線で，transversal に交わる。

(ii) $(\alpha, k) = (0, 10)$ ：$\varphi_{|2K_Z|} : Z \longrightarrow \varphi_{|2K_Z|}(Z) = \Sigma \subset \mathbb{P}^3$, $\Sigma$ は 4次超曲面で，定義式は次のように書ける。$A$ を $\mathbb{P}^3$ 上の一次形式を成分とする対称 $4 \times 4$ 行列とする。ある $A$ に対し

$\Sigma = \{ \det(A) = 0 \} \subset \mathbb{P}^3$。この $\Sigma$ は古典的には Cayley's symmetroid と呼ばれている。

(iii) $(\alpha, k) = (1, 10)$ $\varphi_{|2K_Z|} : Z \longrightarrow \Sigma \longrightarrow \varphi_{|2K_Z|}(Z) = \overline{\mathbb{F}}_2 \subset \mathbb{P}^3$,

$\overline{\mathbb{F}}^2$ : cone over conic. $\Sigma$ : double covering of $\overline{\mathbb{F}}^2$ branched along $Q_1 \cap \overline{\mathbb{F}}_2$ and $Q_2 \cap \overline{\mathbb{F}}_2$ where $Q_1, Q_2$ are quadratic hypersurface intersecting each other transversaly.

## §4. Nikulin, Morrison-Mirandaの埋め込み定理

この章では，周期写像の次数を計算するのに必要な，格子の埋め込み定理を復習する。

$M$を even lattice，$L$を even unimodular lattice とする。
$\varphi : M \hookrightarrow L$が，双一次形式を保っている時，埋め込みという。又 $L/\varphi(M)$ が free である時，primitive であると言った。

$B : M \times M \to \mathbb{Z}$ を双一次形式とする時，

$M^* = \{ x \in M \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q} \mid \text{s.t. } B(x, y) \in \mathbb{Z}, \text{ for } {}^\forall y \in M \}$

とおく。自然に $M \hookrightarrow M^*$ であるが，$G_M = M^*/M$ とおく。$M^*$には自然に $B$ が拡張され，${}^\forall \bar{x}, \bar{y} \in G_M$ に対し，$b : G_M \times G_M \to \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ を

$$b(\bar{x}, \bar{y}) \equiv B(x, y) + \mathbb{Z}$$ で定める。

<u>定義9.</u> (1) $G$を有限アーベル群，$b : G \times G \longrightarrow \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ を双一次形式が，非退化とは，${}^\forall y \in G$，$b(y, x) \in \mathbb{Z} \Rightarrow x = 0$

(2) $G$上の有限2次形式 $q$ とは，写像 $q : G \longrightarrow \mathbb{Q}/2\mathbb{Z}$ であって次を満すものである。

(i) $q(nx) = n^2 q(x) \quad {}^\forall x \in G,\ {}^\forall n \in \mathbb{Z}$

(ii) $b(x, y) = \frac{1}{2}(q(x+y) - q(x) - q(y))$ が非退化双一次形式.

定義より $G_M$には，2次形式 $q : G_M \longrightarrow \mathbb{Q}/2\mathbb{Z}$ が引き起こされる。$(G_M, q)$ を lattice $M$ の discriminant form と言う。
$O(G_M) = \mathrm{Aut}(G_M, q)$ とする。

$L$ を even lattice で signature が $(s_+, s_-)$ とする。$s_+ \cdot s_- \neq 0$ の時に indefinite と言われる。$\sigma$ を $L$ の positive sign structure，$O_+(L) = \{ \gamma \in O(L) \mid \gamma(\sigma) = \sigma \}$ とおく。

$(L_1, \sigma_1)$ と $(L_2, \sigma_2)$ が $(+)$-isometry とは，$^\exists \varphi : L_1 \xrightarrow{\sim} L_2$ isometry s.t. $\varphi(\sigma_1) = \sigma_2$。Morrison-Miranda による Nikulin の定理の一拡張を述べる。

定理 10. $L$ : even indefinite lattice rank $L = r \geqq 3$. $\sigma$ : positive sign structure. $G_L \cong \mathbb{Z}/d_1\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}/d_2\mathbb{Z} \oplus \cdots \oplus \mathbb{Z}/d_r\mathbb{Z}$ s.t. $d_i \geqq 1$, $d_i \mid d_{i+1}$. 次のいずれかを仮定する。

(i) $d_1 = d_2 = 1$, (ii) $d_1 = d_2 = 2$, $d_3 \equiv 2 \mod 4$.

この時，$(L, \sigma)$ は $(+)$-isometry をのぞいて signature と discriminant form $(G_L, q)$ で定まり，さらに

$$O_+(L) \longrightarrow O(G_L)$$

は全射.

## §5 Finite quadratic form.

$(G, q)$ を finite quadratic form とする。我々は，§3 で導入した $M_n$, $M_{\alpha,k}$ $(\alpha, k) \neq (5, 16)$, $M'_{5,16}$ の discriminant form を計算し，その直交群 $O(G_M)$ を決定したい。そのために $(G, q)$ を indecomposable なものに標準的に分解する事を考える。$G_p$ を $G$ の $p$-Sylow 群とすると，$p \neq q \Rightarrow (G_p, q) \perp (G_q, q)$

である事がわかる。よって $(G, q) = \underset{p:\mathrm{prime}}{\overset{\perp}{\oplus}} (G_p, q_p)$ となる。

さて，indecomposable な form は次のように分類される。

| 記号 | 群 | matrix. | |
|---|---|---|---|
| $W_{p,k}^{\varepsilon}$ | $\mathbb{Z}/p^k\mathbb{Z}$ | $\left(\frac{\theta}{p^k}\right)$ | p : odd prime $\varepsilon = \pm 1$ $\theta \in \mathbb{Z} \cap \mathcal{U}_p$, $\left(\frac{\theta}{p}\right) = \varepsilon$ |
| $W_{2,k}^{\varepsilon}$ | $\mathbb{Z}/2^k\mathbb{Z}$ | $\left(\frac{\varepsilon}{2^k}\right)$ | $\varepsilon \in (\mathbb{Z}/8\mathbb{Z})^{\times}$ |
| $U_k$ | $\mathbb{Z}/2^k\mathbb{Z} + \mathbb{Z}/2^k\mathbb{Z}$ | $\begin{pmatrix} 0 & 2^{-k} \\ 2^{-k} & 0 \end{pmatrix}$ | |
| $V_k$ | $\mathbb{Z}/2^k\mathbb{Z} + \mathbb{Z}/2^k\mathbb{Z}$ | $\begin{pmatrix} 2^{1-k} & 2^{-k} \\ 2^{-k} & 2^{1-k} \end{pmatrix}$ | |

これらは，finite quadratic forms のなす semigroup $qu(\mathbb{Z})$ の生成元をなす。これらの生成元の間の関係が Brieskorn [2] にある。さらに Kawauchi, Kojima がこの関係が完全である事を示した。(cf. [9])．Miranda [10] は，これを用いて finite quadratic form の normal form の作り方を示している。

さて，$M = M_n$ $(3 \leqq n \leqq 10)$，$M_{\alpha,k}$ $(\alpha, k) \neq (5, 16)$ $M'_{\alpha,k}$ の discriminant form を $G_n = G_{M_n}$，$G_{\alpha,k} = G_{M_{\alpha,k}}$，$(\alpha, k) \neq (5, 16)$ $G_{5,16} = G_{M'_{5,16}}$ とおく。

我々は次のような normal form を得る。(cf. [11], [14])

Table I. Normal form of $G_n$ (and orthogonal group)

| $n$ | $G_n$ | $O(G_n)$ | $\lvert O(G_n)\rvert$ |
|---|---|---|---|
| 3 | $U_1 \oplus W_{2,1}^{-1} \oplus W_{2,1}^{-1}$ | $\mathbb{Z}/2 \ltimes Sp(2,2)$ | $2^2 \cdot 3$ |
| 4 | $U_1 \oplus V_1 \oplus W_{2,1}^{1}$ | $O_-(4,2)$ | $2^3 \cdot 3 \cdot 5$ |
| 5 | $U_1 \oplus V_1 \oplus W_{2,1}^{1} \oplus W_{2,1}^{-1}$ | $(\mathbb{Z}/4)^4 \ltimes O_-(4,2)$ | $2^7 \cdot 3 \cdot 5$ |

| | | | |
|---|---|---|---|
| 6 | $(U_1)^2 \oplus V_1 \oplus W_{2,1}^{-1}$ | $O_-(6,2)$ | $2^7 \cdot 3^4 \cdot 5$ |
| 7 | $(U_1)^3 \oplus W_{2,1}^{1} \oplus W_{2,1}^{1}$ | $\mathbb{Z}/2 \ltimes Sp(6,2)$ | $2^{10} \cdot 3^4 \cdot 5 \cdot 7$ |
| 8 | $(U_1)^4 \oplus W_{2,1}^{1}$ | $O_+(8,2)$ | $2^{13} \cdot 3^5 \cdot 5^2 \cdot 7$ |
| 9 | $(U_1)^4 \oplus W_{2,1}^{1} \oplus W_{2,1}^{-1}$ | $(\mathbb{Z}/2)^8 \ltimes O_+(8,2)$ | $2^{24} \cdot 3^5 \cdot 5^2 \cdot 7$ |
| 10 | $(U_1)^5 \oplus W_{2,1}^{-1}$ | $O_+(10,2)$ | $2^{21} \cdot 3^5 \cdot 5^2 \cdot 7 \cdot 17 \cdot 31$ |

Table II. Normal form of $G_{d,k}$ (and orthogonal group).

| $(d,k)$ | $G_{d,k}$ | $O(G_{d,k})$ | $\lvert O(G_{d,k}) \rvert$ |
|---|---|---|---|
| $(0,9)$ | $(U_1)^4$ | $O_+(8,2)$ | $2^{13} \cdot 3^5 \cdot 5^2 \cdot 7$ |
| $(0,10)$ | $(U_1)^4 \oplus W_{2,2}^{-1}$ | $(\mathbb{Z}/2) \ltimes Sp(8,2)$ | $2^{17} \cdot 3^5 \cdot 5^2 \cdot 7 \cdot 17$ |
| $(1,10)$ | $(U_1)^3 \oplus W_{2,2}^{7}$ | $(\mathbb{Z}/2) \ltimes Sp(6,2)$ | $2^{10} \cdot 3^4 \cdot 5 \cdot 7$ |
| $(0,11)$ | $(U_1)^4 \oplus V_1 \oplus W_{3,1}^{2}$ | $(\mathbb{Z}/2) \ltimes O_-(10,2)$ | $2^{22} \cdot 3^6 \cdot 5^2 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 17$ |
| $(1,11)$ | $(U_1)^3 \oplus V_1 \oplus W_{3,1}^{2}$ | $(\mathbb{Z}/2) \ltimes O_-(8,2)$ | $2^{14} \cdot 3^4 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 17$ |
| $(1,12)$ | $(U_1)^3 \oplus V_1 \oplus W_{2,3}^{5}$ | $(\mathbb{Z}/2)^9 \ltimes O_-(8,2)$ | $2^{22} \cdot 3^4 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 17$ |
| $(2,12)$ | $(U_1)^2 \oplus V_1 \oplus W_{2,3}^{5}$ | $(\mathbb{Z}/2)^7 \ltimes O_-(6,2)$ | $2^{14} \cdot 3^4 \cdot 5$ |
| $(2,13)$ | $(U_1)^3 \oplus V_1 \oplus W_{5,1}^{2}$ | $\mathbb{Z}/2 \ltimes O_-(8,2)$ | $2^{14} \cdot 3^4 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 17$ |
| $(3,14)$ | $(U_1)^3 \oplus W_{2,2}^{5} \oplus W_{3,1}^{5}$ | $\mathbb{Z}/2 \ltimes \mathbb{Z}/2 \ltimes Sp(6,2)$ | $2^{11} \cdot 3^4 \cdot 5 \cdot 7$ |
| $(4,15)$ | $(U_1)^3 \oplus W_{7,1}^{2}$ | $\mathbb{Z}/2 \ltimes O_+(6,2)$ | $2^8 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 7$ |
| $(5,16)$ | $(U_1)^2 \oplus W_{2,2}^{1}$ | $\mathbb{Z}/2 \ltimes Sp(4,2)$ | $2^5 \cdot 3^2 \cdot 5$ |

くわしくは[11]および[14]を見よ。ここで $H_1 \ltimes H_2$ は $1 \to H_1 \to H_1 \ltimes H_2 \to H_2 \to 1$ というある extension で定まる群をあらわす。

## §6. Orthogonal group of the discriminant form.

$G$ を 2 elementary group. $(G, g)$ が special とは, $^{\forall}x \in G$ s.t. $b(x, u) = 0$ for $^{\forall}u$ and $g(x) = 0 \Rightarrow x = 0$ の時を言う。この時 $(G, g)$ は $\mathbb{F}_2$-vector space 上の二次形式と思える。この時,

(1) rank $G = 2m+1$ $\quad (G, g) \cong (V_1)^m \oplus (x)$ s.t. $g(x) = 1$.

$$O(G) \cong Sp(2m, 2)$$

(2) rank $G = 2m$, $\quad (G, g) \cong (V_1)^m$ or $(V_1)^{m-1} \oplus V_1$

$$O((V_1)^m) \cong O_+(2m, 2), \quad O((V_1)^{m-1} \oplus V_1) \cong O_-(2m, 2)$$

これらの位数は次で与えられる。([6] を見よ。)

$$|Sp(2m,2)| = 2^{m^2} \prod_{i=1}^{m} (2^{2i} - 1), \quad |O_+(2m,2)| = 2 \cdot 2^{m(m-1)} \cdot (2^m - 1) \cdot \prod_{i=1}^{m-1} (2^{2i} - 1)$$

$$|O_-(2m,2)| = 2 \cdot 2^{m(m-1)} \cdot (2^m + 1) \prod_{i=1}^{m-1} (2^{2i} - 1).$$

これらと Table I, Table II の normal form を用いて, $O(G_n)$, $O(G_{\alpha,k})$ の群の形および位数を計算することができる。
(紙数が足りないので Table I, II に群および位数を付記した。)

## §7. 周期写像の次数

$$p_n : \mathcal{M}_{n,c} \to \mathcal{D}/O_+(N_n)/\pm 1, \quad p_{\alpha,k} : \mathcal{M}_{\alpha,k,c} \to \mathcal{D}/O_+(N_{\alpha,k})/\pm 1$$

の次数を計算しよう。§2 の考察から

$$\deg p_n = [O_+(N_n)/\pm 1 : \Gamma_n], \quad \deg p_{\alpha,k} = [O_+(N_{\alpha,k})/\pm 1 : \Gamma_{\alpha,k}].$$

ただし $\Gamma_n = \mathrm{Im}(\{\gamma \in O_+(\Lambda) \mid \gamma(M_n) = M_n,\ \gamma(\lambda) = \lambda\} \to O_+(N_n)/\pm 1)$

$$\Gamma_{\alpha,k} = \mathrm{Im}\left(\{\gamma \in O_+(\Lambda) \mid \gamma(M_{\alpha,k}) = M_{\alpha,k},\ \gamma(\lambda) = \lambda,\ \gamma(\mu) = \mu\} \to O_+(N_{\alpha,k})/\pm 1\right)$$

である。

$$\mathfrak{S}_n = \{ g \in O(M_n) : g(\lambda)=\lambda,\ g(e_p)=e_{\sigma(p)} \text{ for some permutation } \sigma \text{ of } n \text{ letters} \}$$

$$\mathfrak{S}_{\alpha,k} = \{ g \in O(M_{\alpha,k}) : g(\lambda)=\lambda,\ g(e_p)=g(e_{\sigma(p)}) \text{ for some permutat } \sigma \text{ of } k \text{ letters} \}$$

とおく。
次が示される。

**命題11** (1) $\mathfrak{S}_n = S_n$ : $n$次置換群

(2) $(\alpha,k) \neq (5,16) \Rightarrow 1 \to (S_{2^{4-\alpha}})^{2^\alpha-1} \times S_h \to \mathfrak{S}_{\alpha,k} \to GL(\alpha,\mathbb{F}_2) \to 1$

$h = k - 2^{4-\alpha}(2^\alpha - 1)$

(3) $1 \to (\mathbb{Z}/2)^4 \to \mathfrak{S}_{5,16} \to S_6 \to 1$.

**命題12** (1) $\mathfrak{S}_n \to O(G_n)$ は単射

(2) $(\alpha,k)\neq(5,16)$ $\mathfrak{S}_{\alpha,k} \to O(G_{\alpha,k})$ は単射

(3) $\mathrm{Ker}\,(\mathfrak{S}_{5,16} \to O(G_{\alpha,k})/\pm 1) \cong (\mathbb{Z}/2)^4$

さて $N = N_n$ 又は $N_{\alpha,k}$ $M = M_n$ or $M_{\alpha,k}$ ($M'_{5,16}$) とする。
$(G_{N_n}, q) \cong (G_n, -q)$, $(G_{N_{\alpha,k}}, q) \cong (G_{\alpha,k}, -q)$ が成立する。したがって $G_N$ は Table I, II より, rank 2以上の 2-elementary part を含む。又 $N$ は indefinite even, rank $N = r > 3$ であるから, 定理 より $O_+(N) \to O(G_N)$ は全射である。よって次の図式を得る。

$$\begin{array}{ccccccccc}
1 & \longrightarrow & K_2 & \longrightarrow & \Gamma & \xrightarrow{\pi_2} & H_N & \longrightarrow & 1 \\
 & & \wr\!\downarrow h_2 & & \downarrow h_1 & & \downarrow h_3 & & \\
1 & \longrightarrow & K_1 & \longrightarrow & O_+(N)/\pm 1 & \xrightarrow{\pi_1} & O(G_N)/\pm 1 & \longrightarrow & 1
\end{array}$$

ここで $H_N = \mathrm{Im}\,(\Gamma \xrightarrow{\pi_2} O(G_N)/\pm 1)$, $K_1 = \mathrm{Ker}\,\pi_1$, $K_2 = \mathrm{Ker}\,\pi_2$

ここで，大域トレリの定理から $K_1 \cong K_2$ がでる。又

$O(G_N) \underset{\varphi}{\cong} O(G_M)$ という同型を用いて，$\varphi(\mathrm{Im}(\mathfrak{S} \to O(G_M)/\pm 1))$

$= H_N$ である事がわかる。ここで $\mathfrak{S} = \mathfrak{S}_n, \mathfrak{S}_{\alpha,k}$.

よって次の定理を得る。

## 定理 13

(1) $\deg. P_n = \dfrac{|O(G_n)|}{|\mathfrak{S}_n|} = \dfrac{|O(G_n)|}{n!}$ for $3 \leqq n \leqq 10$.

(2) $\deg. P_{\alpha,k} = \dfrac{|O(G_{\alpha,k})|}{2|\mathfrak{S}_{\alpha,k}|}$ $(\alpha, k) \neq (0,9), (1,10), (5,16)$

$= \dfrac{|O(G_{\alpha,k})|}{|\mathfrak{S}_{\alpha,k}|}$ $(\alpha, k) = (0,9), (1,10)$

$= \dfrac{8|O(G_{5,16})|}{|\mathfrak{S}_{5,16}|}$ $(\alpha, k) = (5,16)$

何故ならば $\deg P = [O_+(N) : \Gamma] = [O(G_N)/\pm 1 : H_N]$

$= [O(G_M)/\pm 1 \; \mathrm{Im}(\mathfrak{S} \to O(G_M)/\pm 1)]$, $M \neq M'_{5,16}$ ならば $\mathfrak{S} \to O(G_M)$

は単射，さらに $\mathfrak{S} \to O(G_M)/\pm 1$ も単射であることがわかる。$G_M$ が

2-elementary でなければ $1_{G_M} \neq -1_{G_M}$，2 elementary ならば，

$1_{G_M} = -1_{G_M}$ であるから，上記の定理をえる。$(\alpha, k) = (5, 16)$

の時も命題を使えば明らか。

この定理を用いて，$\deg P_n$，$\deg P_{\alpha,k}$ を計算すると次のようになる。

1. *Cremona case*

| $n$ | deg. $p_n$ |
|---|---|
| 3 | 2 |
| 4 | 5 |
| 5 | 16 |
| 6 | 72 |
| 7 | 576 |
| 8 | 8640 |
| 9 | $2^8 \cdot 960$ |
| 10 | $2^{13} \cdot 51 \cdot 31$. |

2. *Todorov case*.

| $(\alpha,k)$ | $\lvert \mathfrak{G}_{\alpha,k} \rvert$ | degree of $p_{\alpha,k}$ | $\mathfrak{G}_{\alpha,k}$ |
|---|---|---|---|
| (0,9) | $9!$ | $2^6 \cdot 3 \cdot 5 = 960$ | $S_9$ |
| (0,10) | $10!$ | $2^8 \cdot 3 \cdot 17 = 13056$ | $S_{10}$ |
| (1,10) | $8! \cdot 2!$ | $2^2 \cdot 3^2 = 36$ | $S_8 \times S_2$ |
| (0,11) | $11!$ | $2^{13} \cdot 3^2 \cdot 17$ | $S_{11}$ |
| (1,11) | $8! \cdot 3!$ | $2^5 \cdot 3 \cdot 17$ | $S_8 \times S_3$ |
| (1,12) | $8! \cdot 4!$ | $2^{11} \cdot 3 \cdot 17$ | $S_8 \times S_4$ |
| (2,12) | $(4!)^3 \cdot 6$ | $2^3 \cdot 5$ | $(S_4)^3 \rtimes GL(2,\mathbb{F}_2)$ |
| (2,13) | $(4!)^3 \cdot 6$ | $2^3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 17$ | $(S_4)^3 \rtimes GL(2,\mathbb{F}_2)$ |
| (3,14) | $(2!)^7 \cdot 168$ | $3^3 \cdot 5$ | $(S_2)^7 \rtimes GL(3, \mathbb{F}_3)$ |
| (4,15) | $2^6 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 7$ | 2 | $GL(4, \mathbb{F}_2)$ |
| (5,16) | $2^4 \cdot 6!$ | 1 | $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^4 \rtimes S_6$ |

## §8．双有理性

$(X, H) \in \mathcal{M}_n$ 又は $\mathcal{M}_{\alpha,k}$ とする。次の定理が成立する。

定理14 $(X, H)$ かつ $(X', H') \in \mathcal{M}_n$ (resp. $\mathcal{M}_{\alpha,k}$)，$P_n(X,H) = P_n(X',H')$ in $\mathcal{D}/O_+(N_n)/\pm 1$ (resp. $P_{\alpha,k}(X,H) = P_{\alpha,k}(X,H')$)。$f: S \to X$，$\tilde{f}: S' \to X'$ をそれぞれの minimal resolution とする。この時，$^\exists g: S' \xrightarrow{\sim} S$ 同型。とくに，$X$ と $X'$ は双有理同値。

証明．$^\exists \gamma \in O_+(N_n)$ s.t. $\gamma: N(X) \longrightarrow N(X')$：(+)-Hodge isometry.
定理 より，$^\exists \tilde{\gamma}: H^2(S, \mathbb{Z}) \longrightarrow H^2(S', \mathbb{Z})$ s.t. $\tilde{\gamma}|_{N(X)} = \gamma$．
（ここで $O(N) \to O(G_N)$ 全射を用いた。）．$N(X)^\perp \subset H^{1,1}(S, \mathbb{Z})$ より，$\tilde{\gamma}(H^{2,0}(S)) = H^{2,0}(S)$．トレリの定理の weak form（定理3）より，$^\exists g: S' \xrightarrow{\sim} S$．　　q.e.d.

これは問題5に関する1つの解答である。

## §9．Coble's number と Regular Cremona 変換

Coble は，[3]，[4]，[5]等で，$\mathbb{P}^n$ の Regular Cremona 変換を調べた。

定義15 (1)　Standard Cremona 変換　$S: \mathbb{P}^N \to \mathbb{P}^N$ s.t.

$$(z_0, z_1, \cdots, z_N) \longmapsto \left(\frac{1}{z_0}, \frac{1}{z_1}, \cdots, \frac{1}{z_N}\right)$$

(2)　$Cr_N^{reg}$ : Regular Cremona 変換群 $\subset Cr_N$

$$Cr_N^{reg} = \langle PGL(N+1), S \rangle$$

（注）$N = 2$ ならば Noether の定理で $Cr_2^{reg} = Cr_2$，それ以上なら $Cr_N^{reg} \subsetneqq Cr_N$

**定理16** (Coble [3], [4], [5])

(1) For $5 \leqq n \leqq 10$, $p_1, \cdots, p_n$ : $n$-nodes of general irred. sextic curve $C$ in $\mathbb{P}^2$. Cob. $=$ Cob$(p_1, \cdots, p_n) =$ # of projectively equivalent classes which are equivalent to $(p_1, \cdots, p_n)$ under $Cr_2^{reg} = Cr_2$. $\Rightarrow$

| $n$ | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| Cob. | 1 | 72 | 288 | 8640 | $2^8 \cdot 960$ | $2^{13} \cdot 31 \cdot 3 \cdot 17$ |

(2) $p_1, \cdots, p_9$ : base point of cubic pencil $\subset \mathbb{P}^2$

$$\text{Cob.}(p_1, \cdots, p_9) = 960 \quad (= \deg P_{0,9})$$

(3) $p_1, \cdots, p_{10}$ : ten nodes of Cayley Symmetroid $Z_{0,10} \subset \mathbb{P}^3$

$$\text{Cob.}(p_1, \cdots, p_{10}) = 2^8 \cdot 51 \quad (= \deg P_{0,10}).$$

我々は，次数 $\deg P_n$ と $\deg P_{a,n}$ と，若干の幾何的考察から これらの定理を再証明できる。くわしくは[14] を見てほしい。

(注)

$n = 5$ と 7 の時の Cobel number Cob. と $\deg P_5$, $P_7$ が異なっているがこれは，次の事情による。$Y_5 \to \mathbb{P}^2$ (resp. $Y_7 \to \mathbb{P}^2$) を $\mathbb{P}^2$ の general 5点 (resp. 7点) blow-up とする。すると $\mathrm{Aut}(Y_5) \cong (\mathbb{Z}/2)^4$ $\mathrm{Aut}(Y_7) \cong \mathbb{Z}/2$ (Geiser involution)。これらの Aut は $|-2K_{Y_5}|$, $|-2K_{Y_7}|$ に nontrivial に作用するので点のモヂュライと K3 曲面の moduli に差が出るのである。

## REFERENCES

[1] W.Barth, C.Peters, A.Van de Ven: Complex analytic surfaces, Springer, 1984.

[2] E. Brieskorn: Die Milnorgitter der exzeptionellen unimodularen singularritaten, Bonner Mathematische Schriften Nr.150, Bonn 1983.

[3] A. Coble: Point sets and allied Cremona groups II, Trans. Amer. Math. Soc. 17 (1916) 355-385.

[4] ______ : The Ten Nodes of the Rational Sextic and of the Cayley Symmetroid, Amer. Jour. 41 (1919) 243-265.

[5] ______ : Algebraic geometry and theta functions, Amer. Math. Soc. Colloq. Publ., vol.10, Providence, R.I., 1929 (2nd ed.,1961).

[6] J. Dieudonne : La geometrie des group classiques, Ergebnisse der Math., N.F.Bd.5. 2. Aufl. Springer, Berlin 1963.

[7] I.V. Dolgachev: Weyl groups and Cremona transformations, Proc. Symp. Pure Math. Vol. 40(1983), part I, 283-294.

[8] ______ and F.Cossec: On automorphisms of nodal Enriques surfaces; Bul. (New series) of the Amer. Math. Soc. Vol 12, No.2, (1985) 247-249.

[9] A. Kawauchi and S. Kojima: Algebraic classification of linking pairings on 3-manifolds, Math. Ann. 253, (1980), 29-42.

[10] R. Miranda: Nondegenerate symmetric bilinear forms on finite abelian 2-groups, Trans. Amer. Math. Soc. Vol.284, (1984), 535-542.

[11] D. Morrison: On the moduli of Todorov surfaces, to appear .

[12] ______ Some remarks on the moduli of K3 surfaces, Classification of Algebric and Analytic Manifolds, Vol.39, Birkhauser. 303-332.

[13] V.V.Nikulin: Integral symmetric bilinear forms and some of their appllications, Math. USSR Izvestja Vol. 14 (1980), No.1, (English translation), 103-167.

[14] D. R. Morrison & M.-H. Saito; Cremona transformation and degrees of period maps for K3 surfaces with ordinary double points, to appear in Advanced studies in Math.